

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 12

Abgabe ihrer Lösung: Bis Donnerstag, 30. Januar 2020, 09:55 Uhr, in den Briefkasten ihres Tutors im Gebäude F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, schreiben Sie ihren Namen und den Namen ihres Tutors auf jedes Blatt und heften Sie ihre einzelnen Blätter zusammen.

Aufgabe 12.1

(4 Punkte)

Sei A eine beliebige nichtleere Menge und $R \subseteq A \times A$ eine Relation auf A .

- Sei R eine Äquivalenzrelation. Zu $x \in A$ heißt die Menge $[x]_R := \{y \in A : xRy\}$ die Äquivalenzklasse von x unter R . Zeigen Sie, dass für $x, y \in A$ entweder $[x]_R = [y]_R$ oder $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$ gilt. Zeigen Sie weiter, dass $A = \sqcup_{x \in A} [x]_R$.
- Zeigen Sie umgekehrt: Ist I eine Menge und sind $\{A_i : i \in I\}$ nichtleere Teilmengen von A derart, dass
 - $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ und
 - $A = \sqcup_{i \in I} A_i$,
 so definiert

$$xRy :\Leftrightarrow \exists i \in I (\{x, y\} \subseteq A_i)$$

eine Äquivalenzrelation auf A .

Aufgabe 12.2

(4 Punkte)

Sei K ein beliebiger Körper, $n \geq 2$ beliebig und $M = \text{Mat}_{n \times n}(K)$. Entscheiden Sie in (a) und (b) jeweils, ob die gegebene Relation $R \subseteq M^2$ reflexiv, transitiv und symmetrisch ist und ob es sich um eine Äquivalenzrelation handelt.

- $(A, B) \in R$ genau dann wenn A und B zeilenäquivalent sind.
- $(A, B) \in R$ genau dann wenn eine Matrix $C \in M$ existiert mit $A = BC$.
- (★) Beschreiben Sie die Relation R aus (a) in der Form $A = BC$ für eine geeignete Matrix C .
- Prüfen Sie das folgende Argument:

Sei M eine Menge und R eine symmetrische und transitive Relation auf M . Wir behaupten, dass R auch reflexiv ist. Sei hierzu $x \in M$. Wähle ein $y \in M$ so, dass xRy . Wegen der Symmetrie von R ist dann auch yRx . Aus xRy und yRx folgt mittels Transitivität, dass xRx . Also ist R reflexiv.

Wo liegt der Fehler? Finden Sie ein konkretes Gegenbeispiel.

Aufgabe 12.3

(4 Punkte)

Gegeben seien die folgenden linear unabhängigen Vektoren aus $\mathbb{R}^{3 \times 1}$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Dualbasis zu $\{u_1, u_2, u_3\}$, d.h., die linearen Abbildungen $f_i \in (\mathbb{R}^3)^*$ mit $f_i(u_j) = \delta_{ij}$ ($i = 1, 2, 3$).

Aufgabe 12.4

(4 Punkte)

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zu $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ heißt $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ die *Spur* von A . Zeigen Sie:

- $\text{tr}: \text{Mat}_{n \times n}(K) \rightarrow K$ ist eine K -lineare Abbildung.
- Für alle $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ gilt $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- Genau dann existiert zu jedem $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ ein $a \in K$ mit $\text{tr}(A - aI_n) = 0$, wenn $\text{char}(K)$ kein Teiler von n ist.

Sommerhütte der Fachschaft Mathe

Wann? 17.-19.4.20

Wer? Mathe und FiMa Studis

-> Infos und Anmeldung auf der Fachschaftsseite/Veranstaltungen

